## ملخص الدوال اللوغاريتمية والأسية — الأستا ذ محمد الرقبة

### I- دالة اللوغاريتم النبري

$f(x)=\ln(x)=L\log(x)$ ; $\ln 1=0$ ; $\ln e=1$

$\forall x,y\in\mathbb{R}^{*+}, \ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$ ; $D=]0,+\infty[$

$\ln x \succ \ln y \quad \Leftrightarrow \quad x\succ y$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

2) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ ; $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

3) $0\prec x\prec 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x\prec 0$

$1\prec x \quad \Leftrightarrow \quad 0\prec \ln x$

4) $\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$

$\ln xy=\ln x+\ln y$

$\ln\dfrac{x}{y}=\ln x-\ln y$

$\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$

5) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ , $\forall n\in\mathbb{N}$

$\ln x^n=n\ln x$

6) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ , $\forall r\in\mathbb{Q}$

$\ln x^r=r\ln x$

$\ln\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\ln x$

7) $g(x)=\ln u(x)$

$$D_g=\{x\in D_u\,/\,u(x)\succ 0\}$$

- إذا كانت $u$ متصلة وموجبة قطعا على مجال $I$ فإن $g$ متصلة على $I$.
- إذا كانت $u$ موجبة قطعا وقابلة للاشتقاق على مجال $I$ فإن الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $I$.

$$g(x)=\ln u(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$g(x)=\ln|u(x)| \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

### II- دالة اللوغاريتم للأساس $a$

$a\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}$

$$\log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$$

1) $\log_a(1)=0$

$\log_a(a)=1$

2) $\log'_a(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$

(3
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;,\; \forall y \in \mathbb{R}$

$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$

$\ln(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$

(4 اللوغاريتم العشري , $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\log_{10}(x) = \log(x)$

$\log 10 = 1$

$\log x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^y$

## A- الدالة الأسية النبيرية

$$f(x) = \exp(x) = e^x$$

(1
$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x . e^y$

(2
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

(3
$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \prec e^x$

(4
$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad e^x \prec e^y$

$x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^x = e^y$

(5

$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}$

$e^{rx} = (e^x)^r$

(6
$\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x$

(7
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;,\; \forall y \in \mathbb{R}$

**y=lnx** $\quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$

## B- $g(x) = \exp u(x) = e^{u(x)}$

$D_g = D_u$

- إذا كانت $u$ متصلة على مجال $I$ فإن $g$ متصلة على $I$.
- إذا كانت $u$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ فإن $g$ قابلة للاشتقاق على $I$.

و $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).\left(e^{u(x)}\right) \;,\; \forall x \in I$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} e^{u(x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$