Recueil d'annales en Mathématiques

Terminale S - Enseignement obligatoire

Nombres complexes

Frédéric Demoulin[1]

Dernière révision : 14 septembre 2005

[1] frederic.demoulin@voila.fr

Tableau récapitulatif des exercices

$\star$ *indique que cette notion a été abordée dans l'exercice*

N°	Lieu	Année	QCM	Calculs ds $\mathbb{C}$	Transf. du plan	Barycentres	Suites
1	Amérique du Nord	Juin 2005	$\star$		$\star$		
2	Antilles-Guyane	Juin 2005		$\star$	$\star$		
3	Asie	Juin 2005		$\star$	$\star$		
4	France	Juin 2005		$\star$	$\star$		
5	Liban	Juin 2005		$\star$	$\star$		
6	Polynésie	Juin 2005		$\star$	$\star$		
7	Inde	Avril 2005			$\star$		
8	Nouvelle-Calédonie	Mars 2005	$\star$	$\star$			
9	Amérique du Sud	Nov 2004		$\star$	$\star$		
10	Nouvelle-Calédonie	Nov 2004		$\star$			
11	France	Sept 2004		$\star$	$\star$	$\star$	
12	Amérique du Nord	Juin 2004		$\star$	$\star$		
13	Antilles-Guyane	Juin 2004	$\star$	$\star$			
14	Asie	Juin 2004			$\star$		
15	Centres étrangers	Juin 2004		$\star$	$\star$		
16	France	Juin 2004		$\star$	$\star$		
17	La Réunion	Juin 2004		$\star$			
18	Liban	Juin 2004		$\star$	$\star$		
19	Polynésie	Juin 2004		$\star$	$\star$	$\star$	
20	Inde	Avril 2004			$\star$		
21	Nouvelle-Calédonie	Mars 2004			$\star$		
22	Amérique du Sud	Nov 2003			$\star$		
23	France	Sept 2003	$\star$	$\star$	$\star$		
24	Amérique du Nord	Juin 2003		$\star$	$\star$		
25	Antilles-Guyane	Juin 2003			$\star$		
26	Asie	Juin 2003		$\star$	$\star$		
27	France	Juin 2003		$\star$	$\star$		
28	Liban	Juin 2003		$\star$	$\star$		
29	Polynésie	Juin 2003		$\star$	$\star$		
30	Inde	Avril 2003		$\star$	$\star$		

Exercice 1 Amérique du Nord, Juin 2005 (4 points)

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$ et $2,08+1,98\mathrm{i}$.
   Le triangle ABC est :
   (a) : isocèle et non rectangle (b) : rectangle et non isocèle
   (c) : rectangle et isocèle (d) : ni rectangle ni isocèle
2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\mathrm{i}}{z+2}$.
   L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :
   (a) : un cercle de rayon 1 (b) : une droite
   (c) : une droite privée d'un point (d) : un cercle privé d'un point
3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
   L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :
   (a) : un cercle (b) : une droite
   (c) : une droite privée d'un point (d) : un cercle privé d'un point
4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :
   (a) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (b) : $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$
   (c) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (d) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

Exercice 2 Antilles-Guyane, Juin 2005 (5 points)

$(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.
Soit $\mathscr{F}$ l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = \mathscr{F}(M)$ d'affixe $z' = -\dfrac{1}{\overline{z}}$.

1. (a) Soit E le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par $\mathscr{F}$. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
   (b) On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application $\mathscr{F}$.
2. (a) Soit K le point d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par $\mathscr{F}$.
   Calculer l'affixe de K'.
   (b) Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application $\mathscr{F}$.
3. On désigne par R un point d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}30}$ où $30 \in]-\pi\,;\,\pi[$. R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.
   (a) Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$.
   En déduire que : $|z' + 1| = |z'|$.
   (b) Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}30}$ où $30 \in]-\pi\,;\,\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **(a)**.

Exercice 3 Asie, Juin 2005 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-\mathrm{i}$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que :

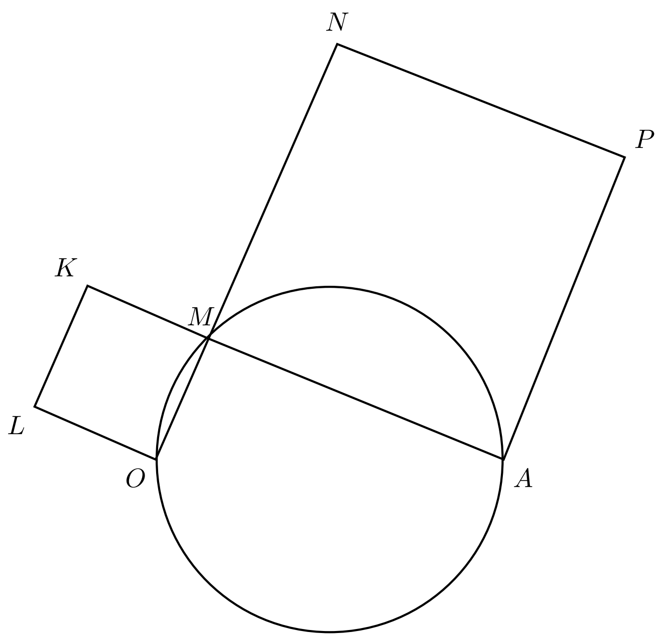
$$z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = (z+\mathrm{i})\left(az^2+bz+c\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+\mathrm{i}$, $4-\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.
3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z+10-2\mathrm{i}}{z-2}$.
   (a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.
   (b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathscr{C}'$.
   (c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z'-\mathrm{i}|$ en fonction de z.
   (d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que $|z'-\mathrm{i}| = 2\sqrt{5}$.
   (e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 4 France, Juin 2005 (5 points)



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA]$, un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a $\left|m - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.
2. Établir les relations suivantes : $l = \mathrm{i}m$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$. On admettra que l'on a également $n = (1-\mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1+\mathrm{i})m$.
3. (a) Démontrer que le milieu Ω du segment $[PL]$ est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.
   (b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.
4. (a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
   (b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 5 Liban, Juin 2005 **(5 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$. Unité graphique : 0,5 cm.
On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6\mathrm{j}$ et $c = 8\mathrm{j}^2$.
Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.
2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.
   (a) Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.
   (b) Montrer que $b' = 16\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   En déduire que O est un point de la droite (BB').
   (c) On admet que $c' = 7 + 7\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.
3. On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.
   (a) Calculer la distance $OA + OB + OC$.
   (b) Montrer que $\mathrm{j}^3 = 1$ et que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
   (c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
   On rappelle que $a = 8$, $b = 6\mathrm{j}$ et $c = 8\mathrm{j}^2$.
   Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left|(a-z) + (b-z)\mathrm{j}^2 + (c-z)\mathrm{j}\right| = \left|a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}\right| = 22.$$

(d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$|z + z' + z''| \leqslant |z| + |z'| + |z''| .$$

Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Exercice 6 Polynésie, Juin 2005 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b :

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) .$$

   Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

$$a = 2, \quad b = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

   (a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.
   Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

   (b) Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

   (c) Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[BB']$, $[B'C']$ et $[C'C]$. On note m, n, p et q leurs affixes.

   (a) Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.
   En déduire que les points O, N et C sont alignés.

   (b) Montrer que $n + 1 = \mathrm{i}(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

   (c) Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

Exercice 7 Inde, Avril 2005 (5 points)

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.
On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2\mathrm{i}$, par B le point d'affixe $-2 + 2\mathrm{i}$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3 + 9\mathrm{i}}{4 + 2\mathrm{i}}$.
   Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega I},\,\overrightarrow{\Omega E}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

(a) Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.

(b) En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{i}$.

4. Soit r l'application du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

(a) Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

(b) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.
Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Exercice 8 Nouvelle-Calédonie, Mars 2005

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans le tableau ci-joint. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.
Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point.
Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.
L'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.
Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel ϑ, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)^n$ est égal à :	$\mathrm{e}^{in\vartheta}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos(\vartheta^n) + \mathrm{i}\sin(\vartheta^n)$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\sin(n\vartheta)$	☐ Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre complexe z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un nombre complexe tel que $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐ Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☐ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a} = \mathrm{i}\sqrt{3}$, alors :	$BC = 2AC$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CA^2$	☐ Faux ☐ Vrai

Exercice 9 Amérique du Sud, Novembre 2004

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$.
Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.
Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$.
On désigne par Ω le centre de Γ.
Soit A, B, C les points d'affixes respectives a, b et c, où $a = 5 + 5\mathrm{i}$, $b = 1 + 3\mathrm{i}$ et $c = 8 - 4\mathrm{i}$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.
2. Soit D le point d'affixe $2 + 2\mathrm{i}$.
   Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Partie B

À tout point M du plan différent de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{20}{\overline{z}} \quad \text{où } z \text{ désigne le nombre conjugué de } z.$$

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z.
   On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M.
   (a) Vérifier que $z + \overline{z} = 4$.
   (b) Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\overline{z}$ et en déduire que $5\left(z' + \overline{z'}\right) = z'\overline{z'}$.
   (c) En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ.
   Placer M' sur la figure.

Exercice 10 Nouvelle-Calédonie, Novembre 2004

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_A = 1 - \mathrm{i}$ et $z_B = 3 + \mathrm{i}$.
   (a) Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.
   (b) On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.
   (a) Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.
   (b) Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.
3. (a) Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

(b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

(c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4 - 3\text{i}$.
Donner la forme trigonométrique de $(z_E + 4)$ et à l'aide du **3.(a)** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

Exercice 11 France, Septembre 2004

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4\text{i} \qquad \text{et} \qquad b = 4\sqrt{3} + 4\text{i}.$$

   (a) Écrire a et b sous forme exponentielle.

   (b) Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O\,;\,-1)$, $(D\,;\,1)$, $(B\,;\,1)$.

   (a) Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6\text{i}$.

   (b) Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

   (c) Montrer que les points C, D et G sont alignés.

   (d) Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

Exercice 12 Amérique du Nord, Juin 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) \quad z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0.$$

   (a) Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)(z^2 + az + b) = 0.$$

   (b) Résoudre (E).

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2.$$

(a) On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.
Montrer que M appartient à (H) si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.

(b) Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3 - \mathrm{i}\sqrt{5}$ et $-3 + \mathrm{i}\sqrt{5}$. Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

   (a) Déterminer les affixes de A', B' et C', images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

   (b) On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'.
   On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).
   Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
   En utilisant la question **2.(a)**, prouver que M' appartient à (H') si et seulement si $x'y' = -2$.

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A', B', C', la courbe (H'), puis la courbe (H).

Exercice 13 Antilles-Guyane, Juin 2004

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.*

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

   (a) $2\sqrt{2}$. (b) $2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$. (c) $2 + \sqrt{2} + \mathrm{i}\left(2 - \sqrt{2}\right)$. (d) $2\sqrt{2} + 2\mathrm{i}\sqrt{2}$.

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

   (a) $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. (b) $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. (c) $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$. (d) $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

   (a) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$. (b) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$. (c) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}$. (d) $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$.

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

   (a) $\dfrac{7\pi}{8}$. (b) $\dfrac{5\pi}{8}$. (c) $\dfrac{3\pi}{8}$. (d) $\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 14 Asie, Juin 2004

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$, unité graphique 1 cm.
Soit A le point d'affixe 3i. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3\mathrm{i}z - 7}{z - 3\mathrm{i}}.$$

1. Recherche des points invariants par f

   (a) Développer $(z - 7\mathrm{i})(z + \mathrm{i})$.

   (b) Montrer que f admet deux points invariants B et C dont on précisera les affixes et qu'on placera sur un dessin.

2. On appelle Σ le cercle de diamètre $[BC]$. Soit M un point quelconque de Σ distinct de B et de C, soit M' son image par f.
   (a) Justifier que l'affixe z de M vérifie $z = 3\mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$ où ϑ est un nombre réel.
   (b) Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de ϑ et en déduire que M' appartient aussi à Σ.
   (c) Démontrer que $z' = -\overline{z}$ et en déduire, en la justifiant, une construction géométrique de M'.
3. On considère un cercle de centre A, de rayon $r > 0$. Déterminer l'image de ce cercle par f.

Exercice 15 Centres étrangers, Juin 2004

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$, unité graphique : 2 cm.
On appelle A le point d'affixe $-2\mathrm{i}$.
À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -2\overline{z} + 2\mathrm{i}$.

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2\mathrm{i}$.
   Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur un dessin.
2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).
3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $|z' + 2\mathrm{i}| = 2|z + 2\mathrm{i}|$; interpréter géométriquement cette égalité.
4. Pour tout point M distinct de A on appelle ϑ un argument de $z + 2\mathrm{i}$.
   (a) Justifier que ϑ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{AM}\right)$.
   (b) Démontrer que $(z + 2\mathrm{i})(z' + 2\mathrm{i})$ est un réel négatif ou nul.
   (c) En déduire un argument de $z' + 2\mathrm{i}$ en fonction de ϑ.
   (d) Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?
5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

Exercice 16 France, Juin 2004

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1 + \mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$.
2. On considère l'équation (E) $z^2 = -8\mathrm{i}$.
   (a) Déduire de **1.** une solution de l'équation (E).
   (b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Déduire également de **1.** une solution de l'équation (E') $z^3 = -8\mathrm{i}$.
4. On considère le point A d'affixe $2\mathrm{i}$ et la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
   (a) Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.
   (b) Montrer que b et c sont solutions de (E').
5. (a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

(b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

(c) Déterminer le centre de gravité de cette figure.

Exercice 17 La Réunion, Juin 2004

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$.
Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z+2}{z-\mathrm{i}}.$$

1. (a) Déterminer les images de B et de C par l'application f.
   (b) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation :
   $$(z'-\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = 1.$$
   (c) Soit D le point d'affixe $1+2\mathrm{i}$. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).
   Déduire de la question précédente une construction du point D', image du point D par l' application f.
2. Soit R un nombre réel strictement positif.
   Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?
3. (a) Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?
   (b) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Déterminer l' image de la droite $\mathscr{D}$ privée du point A par l'application f.

Exercice 18 Liban, Juin 2004

Le plan complexe est rapporté au repère $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $$(z-2\mathrm{i})\left(z^2-2z+2\right) = 0.$$
   Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).
2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1+\mathrm{i}$ et $z_B = 2\mathrm{i}$.
   À tout complexe z différent de A on associe le complexe
   $$z' = \frac{z-2\mathrm{i}}{z-1-\mathrm{i}}.$$
   (a) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
   Montrer que $B \in (E)$.
   Déterminer et construire l'ensemble (E).

(b) Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
Déterminer et construire (F).

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   (a) Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $I\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

   (b) Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

Exercice 19 Polynésie, Juin 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 2\mathrm{i}, \quad z_B = -3 \quad \text{et} \quad z_I = 1 - 2\mathrm{i}.$$

   (a) Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

   (b) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$.
   Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

   (c) Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

   (d) Soit D le barycentre du système $\{(A\,;\,1),\ (B\,;\,-1),\ (C\,;\,1)\}$; calculer l'affixe z_D du point D.

   (e) Montrer que $ABCD$ est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}.$$

   (a) Montrer que B appartient à Γ_2.

   (b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

Exercice 20 Inde, Avril 2004

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

   Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
   Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B' l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment $[OB]$.
   (a) Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle $AO'B'$?
   (b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$.
   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3}-\mathrm{i}$.
   (c) La conjecture émise à la question **(a)** est-elle vraie ?

Exercice 21 Nouvelle-Calédonie, Mars 2004

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$, on considère le quadrilatère $ABCD$ tel que :

$$\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)=\alpha\quad[2\pi],\ \left(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CB}\right)=\beta\quad[2\pi],\ 0<\alpha<\pi,\ 0<\beta<\pi.$$

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que :

$$\left(\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DP}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi],\qquad\left(\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DQ}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi],$$

$$\left(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]\quad\text{et}\quad\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BN}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi].$$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :
$$m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)+b,\qquad n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)+b,$$
$$p=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-d)+d,\qquad q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-d)+d.$$
2. En utilisant les relations précédentes :
   (a) Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogrammme.
   (b) Démontrer que l'on a :
$$\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{QP}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi],\quad AC=QP,$$
$$\left(\overrightarrow{NP},\ \overrightarrow{BD}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]\quad\text{et}\quad NP=BD.$$

3. Démontrer que $MNPQ$ est un carré si, et seulement si, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ vérifient :

$$AC = BD \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

où k est un entier relatif.

Exercice 22 Amérique du Sud, Novembre 2003

Le plan complexe est muni d'un repère orthonornial direct $(O\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ (unité graphique 4 cm).
Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et on nomme son centre Ω.

Partie A

On pose $a_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\mathrm{i}$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.
   (a) Calculer b'.
   (b) Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie B

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.
À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.
   (a) Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.
   (b) Montrer que $\left(\overrightarrow{M'O},\ \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$).
   (c) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé de O et de I.
2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O.
   On note x son affixe.
   On choisit a de manière que A soit un point de $\mathscr{C}$ différent de I et de O.
   Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).
   En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

Exercice 23 France, Septembre 2003

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.
On considère les points A et Ω d'affixes respectives :

$$a = -1 + \sqrt{3} + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \omega = -1 + 2\mathrm{i}.$$

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

1. Placer sur une figure les points A et Ω, l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.
2. On note b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

1.	$\lvert a-\omega\rvert =$	2	4	$\sqrt{3}-\mathrm{i}$
2.	$\arg(a-\omega) =$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{47\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$
3.	$\left(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{\Omega C}\right) =$	$\arg[(\omega-c)\mathrm{i}]$	$-\left(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{C\Omega}\right)$	$\dfrac{2\pi}{3}$
4.	$\omega =$	$\dfrac{1}{3}(a+b+c)$	$a+b+c$	$b-2\mathrm{i}$
5.	$\dfrac{b-d}{a-d} =$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$
6.	Le point D est	L'image de Ω par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$	L'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$	L'image de Ω par la la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$

Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela, il doit remplir le tableau ci-dessous, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			

Exercice 24 Amérique du Nord, Juin 2003

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_B = -1-\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_C = 2.$$

1. Placer ces points sur un dessin.
2. (a) Vérifier que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.
   (c) Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.
   Tracer le cercle Γ_1.
3. (a) Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z+\overline{z}) + z\overline{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.
   (b) Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.
4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   (a) Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.
   (b) Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.

5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.
   On posera $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
   On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.
   (a) Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.
   (b) Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(C)$, image du point C par la rotation r ; en déduire que le point $r(C)$ appartient à un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

Exercice 25 Antilles-Guyane, Juin 2003

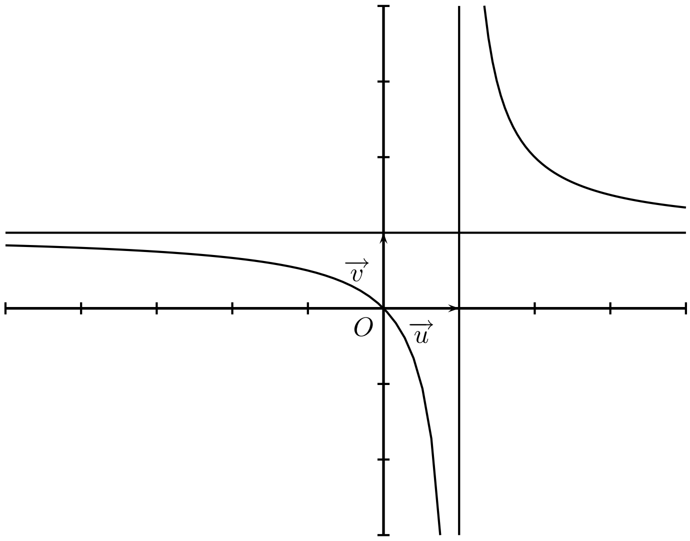
Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points A et B d'affixes respectives $A(3+2\text{i})$ et $B(-1+4\text{i})$. Extérieurement au triangle OAB, on construit les deux carrés OA_1A_2A et OBB_1B_2.

1. (a) En remarquant que A_2 est l'image de O par une rotation de centre A, déterminer l'affixe de A_2. En déduire l'affixe du centre I du carré OA_1A_2A.
   (b) En remarquant que B_1 est l'image de O par une rotation de centre B, déterminer l'affixe de B_1. En déduire l'affixe du centre J du carré OBB_1B_2.
2. Calculer l'affixe du milieu K du segment $[AB]$. À l'aide des affixes des différents points, calculer les longueurs KI et KJ, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{KI},\ \overrightarrow{KJ}\right)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 26 Asie, Juin 2003

Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.
Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$.

1. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = z^2 - 2(1+\text{i})z.$$
   On pose $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$, où x, y, x' et y' sont des nombres réels.
   (a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   (b) Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel. Montrer que $\mathcal{H}$ est la représentation graphique d'une fonction h que l'on déterminera (l'étude de la fonction h n'est pas demandée). $\mathcal{H}$ est tracée sur le graphique ci-dessous.
2. Montrer que le point A d'affixe $a = 2(1+\text{i})$ appartient à Γ et à $\mathcal{H}$.
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On note B et C les points tels que $R(A) = B$ et $R(C) = A$.
   (a) Montrer que $R(B) = C$ et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.
   (b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   (c) Montrer que B et C appartiennent à Γ et à $\mathcal{H}$.
   (d) Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous.



Exercice 27 France, Juin 2003

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2, \quad b = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad c = 1 + \mathrm{i}.$$

1. (a) Placer les points A, B et C sur une figure.

   (b) Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. (a) On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$.
   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $D = r(C)$.

   (b) Soit Γ le cercle de diamètre $[BC]$.
   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

   (a) Montrer qu'il existe un réel ϑ appartenant à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$ tel que $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$.

   (b) Exprimer z' en fonction de ϑ.

   (c) Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

   (d) Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r.

Exercice 28 Liban, Juin 2003

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$4z^2 - 12z + 153 = 0.$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives $z_A = \dfrac{3}{2} + 6\mathrm{i}$, $z_B = \dfrac{3}{2} - 6\mathrm{i}$; $z_C = -3 - \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$, $z_P = 3 + 2\mathrm{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -1 + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

(a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$.

(b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.

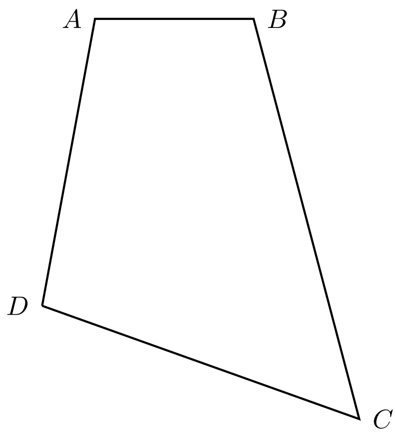
(c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
Placer les points P, Q, R et S.

3. (a) Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.
   (b) Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.
   En déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.
   (c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.
4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$?

Exercice 29 Polynésie, Juin 2003

Dans tout l'exercice, le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.
Les constructions seront faites sur papier millimétré.

1. (a) Le point E a pour affixe $z_E = 3 + \mathrm{i}$ et le point F a pour affixe $z_F = 1 + 3\mathrm{i}$.
   Placer dans $\mathscr{P}$ les points E et F.
   (b) Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet H, c'est-à-dire tel que $\left(\overrightarrow{HF},\ \overrightarrow{HE}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.
   (c) On désigne par z_H l'affixe de H.
   Montrer que $\left|\dfrac{3 + \mathrm{i} - z_H}{1 + 3\mathrm{i} - z_H}\right| = 1$ et que $\arg\left(\dfrac{3 + \mathrm{i} - z_H}{1 + 3\mathrm{i} - z_H}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.
   En déduire que $z_H = 3 + 3\mathrm{i}$.
2. A, B, C et D sont quatre points du plan $\mathscr{P}$.



   (a) Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB d'angles droits respectifs $\widehat{BIA}$, $\widehat{AJD}$, $\widehat{DKC}$ et $\widehat{CLB}$.
   (b) Conjecturer la position relative des droites (IK) et (LJ) et le rapport des longueurs des segments $[IK]$ et $[LJ]$.

3. (a) On désigne par a, b et z_I les affixes respectives des points A, B et I.

   Montrer que $\left|\dfrac{b-z_I}{a-z_I}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b-z_I}{a-z_I}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

   En déduire que $z_I = \dfrac{\mathrm{i}a-b}{\mathrm{i}-1}$.

   (b) Avec les points B, C et L d'affixes respectives b, c et z_L, exprimer sans démonstration z_L en fonction de b et c.

   (c) Avec les points C, D et K d'affixes respectives c, d et z_K, exprimer de même z_K en fonction de c et d. Avec les points D, A et J d'affixes respectives d, a et z_J exprimer de même z_J en fonction de a et d.

   (d) Montrer que $z_L - z_J = \mathrm{i}\,(z_K - z_I)$. En déduire que les droites (JL) et (KI) sont perpendiculaires et que $JL = KI$.

Exercice 30 Inde, Avril 2003

Première partie

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme :

   $$(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$$

   où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.
2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v})$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives :

   $$z_A = -2-2\mathrm{i},\ z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_D = -2+2\mathrm{i}.$$
2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer C.
3. Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   (a) Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.

   (b) Placer les points E et F.
4. (a) Vérifier que $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \mathrm{i}$.

   (b) En déduire la nature du triangle AEF.
5. Soit I le milieu de $[EF]$.

   Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.